کاربرد ۱۲ ضلعی در ایجاد گام‌های ۱۲ قسمتی میکروتونال

شاهین مهاجری[1]

محقق و آهنگساز میکروتونال، لیسانس زمین‌شناسی

چکیده

انتخاب گام، از جمله مهم‌ترین مراحل آهنگسازی در موسیقی میکروتونال است. هر آهنگسازی می‌تواند برای ساخت موسیقی، بنا به سلیقهٔ خود و به اشکال مختلف، گام جدیدی را به‌وجود آورد. یکی از شیوه‌های مختلف طراحی گام، کاربرد مفاهیم ریاضی است. از ابتدای شکل‌گیری دانش فواصل موسیقی، ریاضی نقش اساسی و بنیادین در ایجاد سیستم‌های کوک داشته‌است. استفاده از محاسبات ریاضی در شکل‌گیری سیستم فواصل فیثاغورثی، کوک میانه و درست، مؤید این مطلب است. سؤالی که در این میان مطرح می‌شود این است که چگونه می‌توان نسبت‌های طولی یک دوازده‌ضلعی را به یک گام ۱۲ قسمتی میکروتونال تبدیل کرد؟ برای دستیابی به پاسخ سؤال مذکور در این پژوهش، ابتدا به مفاهیم اولیه‌ای مانند رابطهٔ طول سیم و فرکانس ارتعاش، موسیقی میکروتونال، ریاضی و موسیقی، هندسه و موسیقی، ساختار دوازده‌ضلعی[2] و گام ۱۲ قسمتی پرداخته می‌شود. پس از آن، کارهای انجام‌شدهٔ دیگر بررسی شده و سپس، با ذکر چندین مثال از نحوهٔ طراحی و محاسبهٔ طول اضلاع انواع دوازده‌ضلعی در نرم‌افزار GeoGebra، کاربرد این داده‌ها در طراحی انواع گام‌های ۱۲ قسمتی میکروتونال با استفاده از کاربرگ محاسباتی Excel و رسم جداول و اشکال متناسب، مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین مثالی از تبدیل فواصل یک گام ۱۲ قسمتی میکروتونال به نسبت‌های طولی یک دوازده‌ضلعی ارائه می‌شود.

نتیجهٔ این مقاله، علاوه‌بر آشنایی با نحوهٔ کاربرد اشکال مختلف دوازده‌ضلعی در طراحی انواع سیستم فواصل ۱۲ قسمتی میکروتونال، رسیدن به این واقعیت است که در تمام اشکال چندضلعی، موسیقی پنهانی وجود دارد که بعد از شکل‌گیری سیستم فاصله‌ای متناسب با روابط طولی و هندسی آن‌ها، شنیده می‌شود

کلیدواژگان: گام ۱۲ قسمتی، سیستم فواصل، موسیقی میکروتونال، هندسه، دوازده‌ضلعی.

---

1 . acousticsoftombak@gmail.com

2. dodecago

مقدمه

موسیقی میکروتونال[۱] نوعی موسیقی است که در آن، از فواصل موسیقایی متفاوتی در مقایسه با گام رایج ۱۲ نیم‌پرده مساوی استفاده می‌شود. ایجاد و دسته‌بندی سیستم‌های فواصل[۲] میکروتونال، همواره از چنان اهمیت خاصی برخوردار است که می‌توان آن را همپای طراحی‌ساز با قابلیت میکروتونال یا دیگر جنبه‌های خلاقانهٔ موسیقی میکروتونال دانست. در شکل‌گیری سیستم فواصل مانند سیستم‌های فیثاغورثی[۳]، کوک میانه[۴] و درست[۵]، محاسبات ریاضی نقش اساسی دارند. از طرفی سایر مفاهیم ریاضی، مانند توابع ریاضی، سری‌ها، تصاعدها، میانگین‌ها و... می‌توانند مبنای خلاقیت و ایده‌پردازی در طراحی گام قرار گیرند.

باتوجه به ارتباط بین فرکانس ارتعاش سیم مرتعش و طول بخش مرتعش سیم، باید نقش روابط طولی دوازده‌ضلعی، در طراحی سیستم فواصل میکروتونال بررسی شود. در این مقاله ابتدا به اختصار، رابطهٔ طول سیم و فرکانس ارتعاش آن، ماهیت موسیقی میکروتونال، ریاضی و موسیقی، هندسه و موسیقی، ساختار دوازده‌ضلعی (از منظر ریاضی) و گام[۶] ۱۲ قسمتی مورد بررسی قرار گرفته و سپس شیوهٔ استفاده از ساختار هندسی انواع دوازده‌ضلعی در طراحی گام ۱۲ قسمتی میکروتونال، به‌همراه چندقطعه شنیداری، ارائه می‌گردد.

روش تحقیق

در این تحقیق که دارای هدفی کاربردی بوده و به روش تحلیلی انجام می‌شود، پس از رسم انواع مختلف دوازده‌ضلعی در نرم‌افزار GeoGebra Classic، طول اضلاع آن‌ها اندازه‌گیری شده و پس از ورود داده‌ها در یک کاربرگ محاسباتی و فرمول‌نویسی‌شده Excel، فواصل و گام‌های ۱۲ قسمتی میکروتونال مربوط به هر شکل به دست می‌آید. همچنین براساس فواصل یک گام ۱۲ قسمتی فرضی، طول اضلاع یک دوازده‌ضلعی اندازه‌گیری شده و در نرم‌افزار، طراحی می‌شود. همچنین براساس نتایج حاصل از تبدیل فواصل طولی اضلاع دوازده‌ضلعی به گام ۱۲ قسمتی میکروتونال، دو قطعه موسیقی ارائه می‌شود. برای ساخت این قطعات، سمپل سنتور انتخاب و بعد از ورود اندازهٔ فواصل در سمپلر Kontakt، نوت‌نویسی در برنامه Encore 4.5 انجام می‌شود.

پیشینهٔ مطالعات

در زمینهٔ کاربرد روابط هندسی اشکال در طراحی‌گام‌های میکروتونال، به‌جز دو نوشته، تحقیق مرتبط دیگری انجام نشده‌است. با این حال می‌توان به مواردی اشاره کرد که در آن‌ها، گام‌های موسیقی را به‌نوعی بر روی اشکال هندسی نمایش می‌دهند:

نیهوف و همکاران در سال ۲۰۲۴ با ارائهٔ روشی هندسی، جایگاه فواصل سیستم فیثاغورثی و سیستم کوک درست را بر روی یک مثلث قائم‌الزاویه محاسبه و نشان می‌دهند (Nyhoff, B., Aarskog, A.I. & Holm,۲۰۲۴).

راپاپورت در سال ۲۰۰۵ در مقالهٔ خود، گام‌های موسیقی را به‌صورت چندضلعی در درون یک دایرهٔ کروماتیک[۷] نمایش داده‌است (Rappaprt,D. ۲۰۰۵).

تخمچیان، قره بیگلو و نژاد ابراهیمی ۱۳۹۶، در مقالهٔ خود ضمن بررسی روابط بین ریاضی، موسیقی و معماری، گام‌های موسیقایی را به‌صورت هفت‌ضلعی در یک دایره با ۲۴ قسمت نمایش می‌دهند (تخمچیان، قره بیگلو و نژاد ابراهیمی ۱۳۹۶).

اکانومو ۱۹۹۸، در مقالهٔ خود ضمن بررسی انواع گام‌های متقارن در سیستم ۱۲ نیم‌پرده مساوی، از چندضلعی برای نمایش گام‌ها در درون دایرهٔ کروماتیک استفاده کرده‌است (Economou,A. ۱۹۹۸).

مهاجری در سال ۱۳۹۹ و در مقالهٔ موسیقی پنهان در هندسه، به کاربرد نسبت‌های طولی اشکال چندضلعی در طراحی فواصل موسیقی پرداخته‌است (مهاجری، ۱۳۹۹).

مهاجری در سال ۱۳۹۹ در مقالهٔ موسیقی برگ، به کاربرد نسبت‌های طولی محاسبه‌شدهٔ برگ چنار در طراحی فواصل موسیقی اشاره کرده‌است (مهاجری، ۱۳۹۹).

ارتعاش سیم

فرکانس ارتعاش یک سیم مرتعش که بین دو نقطه محصور شده‌است، از طریق فرمول زیر محاسبه می‌شود:(Benson, 2008, 91)

$$F = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

در فرمول بالا:

- F : فرکانس ارتعاش سیم برحسب هرتز (HZ)

[1] . Microtonal Music

[۲] Intervallic System (مجموعه فواصلی که براساس یک‌سری قوانین و الگوریتم خاص ایجاد شده‌اند).

[3] Pythagorean Tuninig System

[4] Meantone Tuning System

[5] Just Intonation Tuning system

[۶] Scale (تعداد مشخصی از فواصل در یک محدوده تعریف‌شده فاصله‌ای)

[7] Chromatic Circle

– L : طول بخش فعال سیم مرتعش برحسب متر (m)

– T : فرکانس ارتعاش سیم برحسب نیوتون (N)

– μ : جرم واحد طول سیم برحسب کیلوگرم بر متر (Kgm^{-1})

در این فرمول مشخص است که طول بخش فعال سیم مرتعش با فرکانس، نسبت عکس دارد. به این ترتیب، هرچه طول بخش فعال سیم مرتعش کمتر شود، فرکانس ارتعاش و ارتفاع صدا بیشتر می‌شود؛ به‌عنوان مثال ازآنجایی‌که فرکانس نوت اکتاو (F۲) دوبرابر فرکانس پایه ارتعاش سیم (F۱) است، طول بخش فعال سیم مرتعش نوت اکتاو، نصف طول سیم است:

$$\boxed{\begin{aligned} F2 &= 2 \times F1 \\ L2 &= \frac{1}{2} \times L1 \end{aligned}}$$

موسیقی میکروتونال

موسیقی میکروتونال، نوعی موسیقی است که از فواصل موسیقایی متفاوتی در مقایسه با سنت رایج موسیقی غربی استفاده می‌کند. موسیقی میکروتونال به آهنگساز، نوازنده و شنوندۀ موسیقی امکان شنیدن سیستم‌های فواصل متنوع موسیقی را داده و دیدگاه رایج نسبت به سیستم دوازده نیم‌پردۀ معتدل[8] را تغییر می‌دهد. در سیستم‌های فواصل موسیقی میکروتونال، فاصلۀ یک صدا تا صدای بعدی، کمتر یا بیشتر از نیم‌پردۀ سیستم دوازده‌تایی معتدل است.

به چنین فاصله‌ای میکروتون یا ریزپرده می‌گویند. روش‌های مختلفی برای طراحی سیستم فواصل میکروتونال وجود دارد، سیستم‌های کم‌وبیش آشنا عبارت‌اند از:

۱) سیستم ۲۴ قسمتی مساوی ((24-EDO: که در آن، فاصلۀ اکتاو به ۲۴ ربع‌پرده تقسیم می‌شود.

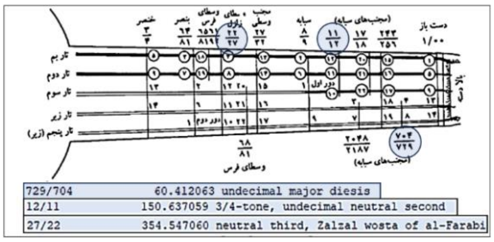
۲) سیستم ۳۱ قسمتی مساوی ((31-EDO: که در آن، فاصلۀ اکتاو به ۳۱ فاصله تقسیم می‌شود (تصویر۱).

البته می‌توان سیستم‌های تقسیم مساوی دیگری را نیز برشمرد؛ به‌عنوان مثال سیستم‌هایی با ۱۹، ۴۳ و ۵۳ فاصلۀ مساوی در اکتاو. با این حال دلیلی ندارد که سیستم فواصل براساس تقسیمات مساوی اکتاو شکل بگیرد، می‌توان سیستمی را براساس تقسیمات مساوی فواصل دیگر مانند فاصلۀ پنجم به‌وجود آورد. همچنین می‌توان از سیستم فواصل درست و سیستم‌های مبتنی بر سری هارمونیک یا چرخۀ یک فاصله مانند فاصلۀ پنجم یاد کرد.

به‌هرحال، با طراحی دلخواه یک سیستم از فواصل میکروتونال، می‌توان از امکانات آن در شکل‌گیری گام‌های متفاوت، آکوردهای میکروتونال و ساخت موسیقی میکروتونال استفاده کرد (مهاجری، ۱۴۰۲).

تصویر ۱- سیستم‌های ۲۴ و۳۱ قسمتی مساوی در مقایسه با سیستم ۱۲ قسمتی مساوی (منبع: نگارنده)

لازم به ذکر است که علاوه‌بر حضور تاریخی میکروتون در موسیقی غرب، بنیاد بسیاری از فرهنگ‌های موسیقایی کلاسیک در خاورمیانه؛ مانند عربی، ایرانی، ترکی/ عثمانی و بیزانسی، در طی تاریخ براساس کاربرد فواصل میکروتون شکل گرفته‌است. فارابی در کتاب الموسیقی الکبیر (فارابی، ۱۳۷۵: ۶۱). فواصل میکروتونال مختلفی را ارائه نموده‌است، فواصلی مانند آنچه در (تصویر ۲) مشاهده می‌شود:



تصویر ۲- دو فاصلۀ میکروتونال ارائه‌شده توسط فارابی (فارابی، ۱۳۷۵: ۶۱).

ریاضی و موسیقی

هنر محصول تلاش تاریخی انسان برای بیان تجربیات زندگی خود است. در این میان، به‌دلیل اشتراکات فراوان ریاضی و هنر، ریاضی‌دانان در طول تاریخ ابزار فراوانی را برای بیان تجربیات زندگی در اختیار بشر قرار داده‌اند؛ از جملۀ این اشتراکات می‌توان به خلاقانه‌بودن، ماهیت انتزاعی و در جست‌وجوی زیبایی بودن اشاره کرد (Budd,2020). ریاضی، گشاینده رمز و رازهای قوانین زیبای طبیعت است. گالیله معتقد بود که جهان به زبان ریاضی نوشته شده و نمادهای آن مثلث، دایره و سایر اشکال هندسی هستند. از نظر او، هنرمندانی که به‌دنبال مطالعۀ طبیعت و بهره‌گیری از آن در بیان تجربیات زندگی خود هستند، باید ریاضی را درک کنند (Shara,2022). داوینچی همواره به اهمیت ریاضی و نسبت‌های هندسی در خلق آثار هنری معتقد بود و رازهایی مانند فرم‌ها و الگوهای هندسی که از طریق بررسی‌های علمی خود آشکار شده بود را در آثار نقاشی خود القا می‌کرد (آتالای، ۱۳۹۶، ۱۹۰).

آرمان برل، ریاضی‌دان سوئیسی، معتقد است که ریاضیات تا اندازۀ زیادی هنر است؛ هنری که پیشرفتش از معیارهای زیباشناختی نشئت گرفته، هدایت شده و بر طبق آن‌ها قضاوت شده‌است. او اظهار می‌دارد

[8] equal temperament , 12-EDO

که ریاضی‌دان یک حس زیبایی‌شناختی قوی نسبت به ریاضیات دارد که توضیح آن دشوار است.

کار ریاضی‌دانان شباهت زیادی با کار هنرمندان دارد: نقاش رنگ‌ها و فرم‌ها را به‌هم می‌آمیزد، موسیقی‌دان اصوات را، شاعر واژه‌ها را و ریاضی‌دانان نوع خاصی از ایده‌ها را (برل، ۱۳۹۷). ریاضی می‌تواند اعداد، نسبت‌ها و تقارن‌ها را که با ظرافت در دل هر پدیده‌ای پنهان هستند، بیرون کشیده و در دسترس هنرمند قرار دهد. هنرمند با دستیابی به چنین مهارت‌های ریاضی، می‌تواند شگرد کشف نسبت‌های موجود در اشکال را به‌دست آورده و دامنهٔ تخیل هنری و از جمله موسیقایی خود را گسترش دهد. این اتفاق به‌نوعی مبین شکل‌گیری مسیری نو بین علم و موسیقی است، مسیری که خلاقیت فی‌البداهه و ناآگاه هنرمند را به سمت اندازه‌گیری و بهره‌گیری از واقعیات عینی هدایت می‌کند. لرد کلوین، فیزیک‌دان برجسته بر اهمیت نقش شفافیت در بیان اندیشه تأکید داشته و اندازه‌گیری و ثبت اطلاعات حاصله را در قالب اعداد مهم می‌داند. اگرچه ممکن است بیان جنبه‌های احساسی یک قطعه موسیقی به زبان ریاضی کاری عجیب باشد؛ اما مطمئنا وجوه قابل اندازه‌گیری و ثبت عددی و تحلیل در هنر و به‌خصوص موسیقی فراوانند (آتالای، ۱۳۹۶،۳۰).

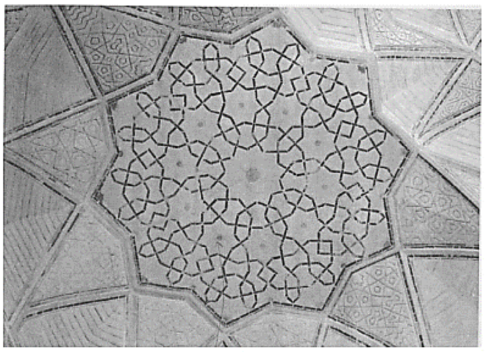
انتخاب ایدهٔ طراحی سیستم فواصل موسیقی براساس اشکال هندسی که می‌تواند مسیری نو برای یک آهنگساز میکروتونال باشد، یکی از وجوه کاربرد محاسبات ریاضی در موسیقی است. این کاربرد مبتنی‌بر اندازه‌گیری و تحلیل و ثبت به‌صورت عدد است. بنابراین ریاضیات ابزاری است برای ایده‌پردازی.

به این ترتیب یک فرمول، یک تابع و رابطهٔ ریاضی، یک شکل هندسی و... می‌تواند به‌عنوان منبعی برای طراحی سیستم فواصل به کار رود. چنین رمزگشایی‌هایی در تبدیل نسبت‌های عددی در ریاضیات و طولی در هندسه به نسبت‌های طولی سیم مرتعش و فواصل موسیقی، می‌توانند به شنیدن موسیقی پنهان در اشکال و فرمول‌ها کمک کنند.

هندسه و موسیقی

هندسه یکی از چهار علوم مقدماتی در قرون وسطی (حساب، موسیقی، هندسه و هیئت) است. تمدن‌های کهنی نظیر مصر، بابل، هند و چین از اطلاعات هندسی زیادی بهره‌مند بوده‌اند. در نظر مصریان باستان، هندسه یعنی اندازه‌گیری و پیمایش سطح زمین و به عبارتی، اصل دوباره برقرارکنندهٔ نظم و قاعده بر روی زمین. در نزد مصریان، قرارگیری مربع‌ها بر روی زمین علاوه بر اینکه حکمتی معنوی داشت، بعد اجتماعی و طبیعی خاصی را نیز دربرمی‌گرفت. اندازه‌گیری زمین به‌تدریج سبب ایجاد اشکالی نظیر دایره، مربع و مثلث گردید؛ اما شکل‌گیری مباحث تئوریک هندسه از راه برهان، مسیر تازه‌ای بود که توسط یونانیان به‌ویژه تالس (سدهٔ ششم پیش از میلاد) پایه‌گذاری شده بود (جیران‌زاده، ۱۴۰۱).

امروزه هندسه، به‌عنوان شاخهٔ مهمی از ریاضیات، به ویژگی‌های اشکال در سطح و فضا، مانند اندازه و موقعیت نسبی آن‌ها می‌پردازد. گذشته از نقش هندسه به‌عنوان شاخه‌ای از ریاضیات، می‌توان به نقش این علم در طراحی اشکال و نقوش، تصاویر، بناها، ساختمان‌ها، کاخ‌ها و مساجد اشاره کرد که ماهیتی عمیقا ریاضی دارد. در واقع، هندسه به‌عنوان یکی از عوامل ترکیب‌بندی نقوش و تصاویر و ابنیه، عنصری مهم اما پنهان است. کاربرد نقوش هندسی در هنرهای تزئینی اسلامی از جمله گره‌چینی[۹]، نشانه‌ای از کاربرد هندسه در معماری است (آقایانی چاوشی، ۱۳۹۰، ۱۵)(تصویر ۳).



تصویر ۳- کاربرد اشکال هندسی در گره‌چینی بازار هنر اصفهان (منبع: چاوشی، ۱۳۹۰، ۱۶)

این هندسه که اساس ترکیب‌بندی است و با ظهور نقش در درون اثر پنهان می‌ماند را هندسهٔ پنهان می‌گویند (جیران زاده، ۱۴۰۱).

هندسه و رابطهٔ آن با موسیقی از دو جنبه قابل بررسی است:

کاربرد اشکال هندسی در ساخت ساز

تولید موسیقی بر مبنای روابط حاصل از اشکال هندسی

اهمیت طراحی ساختار ساز براساس نسبت‌های هندسی بر کسی پوشیده نیست؛ به‌عنوان مثال می‌توان به نحوهٔ اصلاح دهانهٔ صدا و جانمایی آن در روی صفحه صدای سازهای خانوادهٔ لوت اشاره کرد (جعفری و کرباسباف، ۲۰۱۷). همچنین می‌توان به تحقیقی اشاره کرد که به اهمیت کاربرد نسبت‌های هندسی در طراحی و ساخت سازهای زهی

---

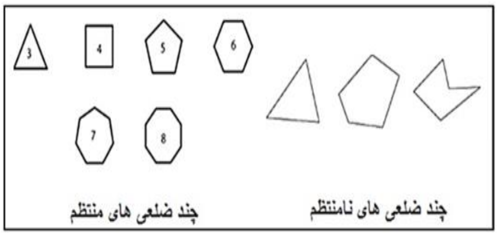
[۹] . گره چینی عبارت است از ترکیب یکپارچه از نقش‌های هندسی متنوعی که در یک چهارچوب مشخص به‌طور هماهنگ و مکمل قرار گرفته‌اند.

کلاویه‌دار در شهر وین اتریش بین سال‌های ۱۷۸۰ تا ۱۸۰۰ میلادی می‌پردازد (Birkett & Jurgenso,۲۰۰۰).

در فصل چهاردهم رسالهٔ معماریه، ساخت آلات موسیقایی براساس اصول و اسلوب شکل‌های هندسی تشریح شده و به نحوهٔ کاربرد اشکال هندسی در ساخت چنبر و دف، کاسهٔ اقسام عود و چنگ پرداخته شده‌است (افندی، ۵۴،۱۳۹۵). در تشریح جزئیات ارتباط روابط طولی در اشکال هندسی، اعم از منتظم یا غیرمنتظم و فواصل موسیقایی، پژوهش‌هایی نیز انجام شده‌است. طراحی سیستم فواصل براساس اشکال هندسی (مهاجری، ۱۳۹۹) و الگوی هندسی پنهان در برگ چنار (مهاجری، ۱۳۹۹) از نتایج این تحقیقات است.

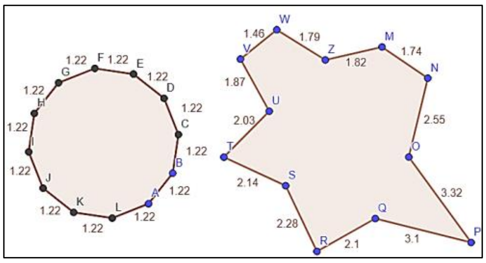
چندضلعی و دوازده‌ضلعی

همچنان که گفته شد، تناسبات موجود در اشکال هندسی؛ از جمله نسبت‌های طولی، می‌توانند کاربردی موسیقایی داشته باشند؛ از جملهٔ این اشکال هندسی می‌توان از چندضلعی[11] نام برد. چندضلعی شکلی دوبعدی است که توسط تعداد نامتناهی خطوط راست به نام ضلع محدود شده‌است. به جمع طول این اضلاع محیط چندضلعی گویند. چندضلعی‌ها گاهی دارای اضلاع و زوایای مساوی هستند که به آن‌ها چندضلعی منتظم[12] می‌گویند و گاهی به‌دلیل نامساوی بودن تعداد اضلاع یا زاویه‌ها، نامنتظم[13] هستند (تصویر۴)(مهاجری، ۱۳۹۹):



تصویر ۴- انواعی از چندضلعی‌های منتظم و نامنتظم (منبع: مهاجری، ۱۳۹۹)

دوازده‌ضلعی، نوعی چندضلعی است با دوازده ضلع که می‌تواند منتظم باشد یا نامنتظم. در دوازده‌ضلعی منتظم، طول اضلاع و زوایا یکسان بوده، درحالی‌که در دوازده‌ضلعی نامنتظم طول اضلاع و زوایا برابر نیست (تصویر۵):



تصویر ۵ – یک نوع دوازده‌ضلعی نامنتظم (سمت راست) و دوازده‌ضلعی منتظم (سمت چپ) (منبع: نگارنده)

گام ۱۲ قسمتی

گام ۱۲ قسمتی، گامی است که از دوازده نت یا دوازده فاصله در یک اکتاو تشکیل شده‌است. این گام می‌تواند دارای فواصل مساوی یا نامساوی باشد.

گام ۱۲ قسمتی مساوی یا 12-EDO (12 Equal divisions of Octave دارای ۱۲ فاصلهٔ نیم‌پرده‌ای مساوی است:

C–C#/Db–D–D#/Eb–E–F–F#/Gb–G–G#/Ab–A–A#/Bb–B–'C

Polygon

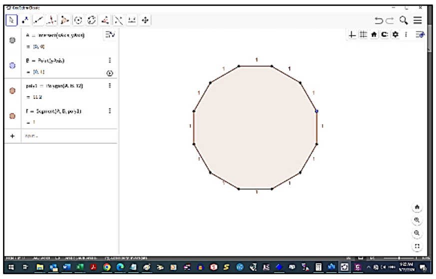
Regular polygon

Irregular polygonتبدیل اندازه اضلاع دوازده‌ضلعی به گام ۱۲ قسمتی

دوازده‌ضلعی منتظم

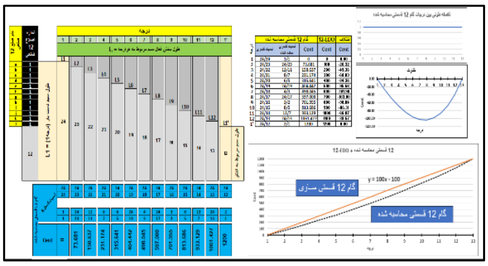
برای تبدیل اندازهٔ اضلاع یک دوازده‌ضلعی منتظم به گام ۱۲ قسمتی، مراحل زیر به‌ترتیب انجام می‌شود:

ابتدا در محیط نرم افزار GeoGebra، از طریق انتخاب گزینهٔ Regular Polygon و رسم دو نقطه و تعیین تعداد رئوس، یک دوازده ضلعی منتظم به طول ضلع ۱ واحد رسم می‌شود (تصویر۶):



تصویر۶– دوازده‌ضلعی منتظم به ضلع ۱ (منبع: نگارنده)

سپس طول اضلاع این دوازده‌ضلعی در کاربرگ محاسباتی Excel وارد می‌شود است (تصویر۷). دسترسی به این کاربرگ با اسکن کد QR انتهای مقاله امکان‌پذیر است.



تصویر ۷– کاربرگ محاسباتی Excel (منبع: نگارنده)

این کاربرگ به‌گونه‌ای طراحی شده‌است که در آن:

طول کل اضلاع دوازده‌ضلعی با یکدیگر جمع و در عدد ۲ ضرب شده و به‌عنوان طول سیم دست باز L1 محسوب می‌شود.

طول بخش فعال هر درجه Ln محاسبه می‌شود (n شماره درجات گام ۱۲ قسمتی بوده و برای سیم دست باز n=1 است).

برای هر درجه، نسبت کسر فاصله R، از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$R = \frac{L1}{Ln} = \frac{\text{طول سیم دست باز}}{\text{طول بخش فعال سیم هردرجه}}$$

پس از محاسبه نسبت کسری R برای هر درجه Ln و از طریق محاسبه بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک اعداد صورت و مخرج، کسر ساده‌تری به‌دست می‌آید.

اندازهٔ فاصله کسری ساده شده R برای هر درجه برحسب Cent، از طریق فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathrm{Cent} = \frac{1200 \times \log R}{\log 2}$$

در نهایت، پس از ورود اطلاعات حاصل از اندازه‌گیری اضلاع دوازده‌ضلعی منتظم در کاربرگ، فواصل این گام ۱۲ قسمتی براساس Cent مطابق جدول زیر قابل مشاهده است (تصویر۸):

درجه	گام 12 قسمتی محاسبه شده			12-EDO	اختلاف
	نسبت کسری	نسبت کسری ساده شده	Cent	Cent	Cent
1	24/24	1/1	0	0	0.00
2	24/23	24/23	73.681	100	-26.32
3	24/22	12/11	150.637	200	-49.36
4	24/21	8/7	231.174	300	-68.83
5	24/20	6/5	315.641	400	-84.36
6	24/19	24/19	404.442	500	-95.56
7	24/18	4/3	498.045	600	-101.96
8	24/17	24/17	597.000	700	-103.00
9	24/16	3/2	701.955	800	-98.04
10	24/15	8/5	813.686	900	-86.31
11	24/14	12/7	933.129	1000	-66.87
12	24/13	24/13	1061.427	1100	-38.57
1'	24/12	2/1	1200	1200	0.00

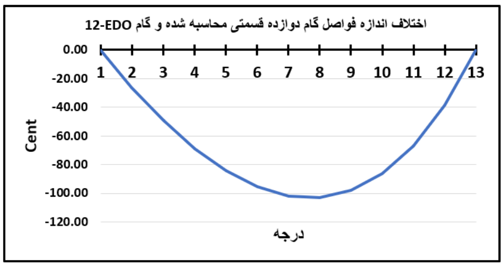
تصویر ۸– جدول اندازه فواصل گام ۱۲ قسمتی به‌دست‌آمده از دوازده‌ضلعی منتظم و میزان اختلاف اندازه درجات آن با 12-EDO (منبع: نگارنده)

در تصویر زیر می‌توان خلاصهٔ محاسبات بالا را (طول بخش هر درجه بر روی سیم، طول بخش فعال سیم مربوط به هر درجه و اندازهٔ هر درجه برحسب Cent) بر روی سیم یک ساز فرضی، مشاهده کرد (تصویر۹):

درجه	فواصل گام هپتاتونیک	طول بخش فعال سیم مربوط به هر درجه هر درجه	طول بخش سیم بین هر درجه
1	0	24	
2	73.681	23	1
3	150.637	22	1
4	231.174	21	1
5	315.641	20	1
6	404.442	19	1
7	498.045	18	1
8	597.000	17	1
9	701.955	16	1
10	813.686	15	1
11	933.129	14	1
12	1061.427	13	1
1'	1200.000	12	1

تصویر ۹– خلاصه محاسبات گام ۱۲ قسمتی به‌دست‌آمده (منبع: نگارنده)

در تصویر ۸، علاوه‌بر اندازهٔ گام ۱۲ قسمتی به‌دست‌آمده، می‌توان میزان اختلاف آن را با گام ۱۲ قسمتی مساوی ۱۲-EDO مشاهده کرد. در تصویر زیر، منحنی میزان اختلاف دوگام مشاهده می‌شود (تصویر۱۰):

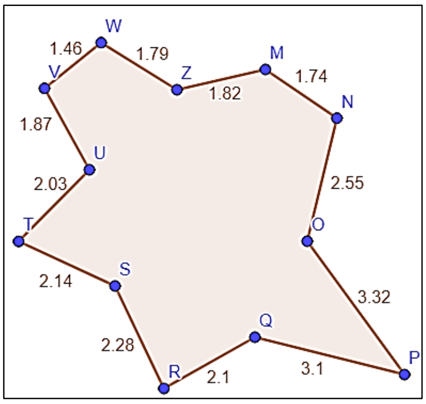


تصویر ۱۰– منحنی میزان اختلاف دوگام (منبع: نگارنده)

لازم به ذکر است، با تغییر اندازهٔ اضلاع دوازده‌ضلعی منتظم، اندازهٔ فواصل گام ۱۲ قسمتی حاصله یکسان خواهد بود. از طرفی اگر طول ضلع دارای اعشار بود، باید با ضرب کردن اندازهٔ ضلع در ۱۰ یا ۱۰۰ یا... آن را به عددی بدون اعشار تبدیل کرد؛ به‌عنوان مثال اگر طول یک ضلع دوازده‌ضلعی منتظمی ۴.۲۳ واحد باشد، باید همهٔ اضلاع را در ۱۰۰ ضرب کرده تا اعشاری مشاهده نشود.

دوازده‌ضلعی نامنتظم

برای تبدیل اندازهٔ اضلاع یک دوازده‌ضلعی نامنتظم به گام ۱۲ قسمتی، مراحلی که در بالا ذکر شد، انجام می‌شود. در ادامه به بررسی یک نمونه پرداخته می‌شود. مثال زیر در نرم‌افزار GeoGebra رسم شده است (تصویر۱۱):



تصویر ۱۱– دوازده‌ضلعی نامنتظم (منبع: نگارنده)

طول اضلاع این دوازده‌ضلعی دارای اعشار است. ابتدا باید با ضرب کردن اندازهٔ اضلاع در ۱۰۰، آن‌ها را به عددی بدون اعشار تبدیل کرده، سپس اعداد بدون اعشار را در کاربرگ محاسباتی وارد کرد. پس از محاسبه، اطلاعات زیر به‌دست می‌آید (تصویر۱۲):

درجه	گام 12 قسمتی محاسبه شده			12-EDO	اختلاف
	نسبت کسری	نسبت کسری ساده شده	Cent	Cent	Cent
1	5240/5240	1/1	0	0	0.00
2	5240/5094	2620/2547	48.921	100	-51.08
3	5240/4915	1048/983	110.850	200	-89.15
4	5240/4733	5240/4733	176.174	300	-123.83
5	5240/4559	5240/4559	241.019	400	-158.98
6	5240/4304	655/538	340.666	500	-159.33
7	5240/3972	1310/993	479.641	600	-120.36
8	5240/3662	2620/1831	620.322	700	-79.68
9	5240/3452	1310/863	722.561	800	-77.44
10	5240/3224	655/403	840.858	900	-59.14
11	5240/3010	524/301	959.764	1000	-40.24
12	5240/2807	5240/2807	1080.645	1100	-19.35
1'	5240/2620	2/1	1200	1200	0.00

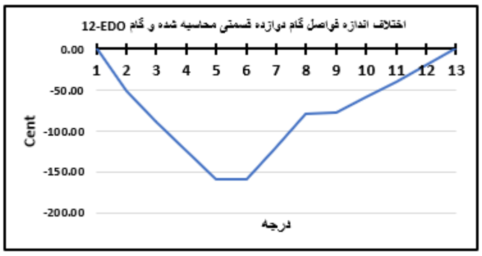
تصویر ۱۲– اندازه فواصل گام ۱۲ قسمتی حاصله از دوازده‌ضلعی نامنتظم و میزان اختلاف اندازه درجات آن با گام 12-EDO (منبع: نگارنده).

در تصویر زیر می‌توان خلاصهٔ محاسبات بالا را (طول بخش هر درجه بر روی سیم، طول بخش فعال سیم مربوط به هر درجه و اندازهٔ هر درجه برحسب Cent) بر روی دسته یک ساز فرضی، مشاهده کرد (تصویر۱۳):

درجه	فواصل گام	طول بخش فعال سیم مربوط به هر درجه هر درجه	طول بخش سیم بین هر درجه
1	0	5240	
2	48.921	5094	146
3	110.850	4915	179
4	176.174	4733	182
5	241.019	4559	174
6	340.666	4304	255
7	479.641	3972	332
8	620.322	3662	310
9	722.561	3452	210
10	840.858	3224	228
11	959.764	3010	214
12	1080.645	2807	203
1'	1200.000	2620	187

تصویر۱۳– خلاصه محاسبات گام ۱۲ قسمتی به‌دست‌آمده (منبع: نگارنده)

در تصویر ۱۲، علاوه بر اندازهٔ گام ۱۲ قسمتی به‌دست آمده، می‌توان میزان اختلاف آن را با گام 12-EDO مشاهده کرد. در تصویر زیر، منحنی میزان اختلاف دو گام مشاهده می‌شود (تصویر۱۴):



تصویر ۱۴– منحنی میزان اختلاف دوگام (منبع: نگارنده)

تبدیل گام ۱۲ قسمتی به دوازده‌ضلعی

همچنان که از یک دوازده‌ضلعی، گام ۱۲ قسمتی ایجاد می‌شود، می‌توان به کمک مهندسی معکوس (فرایند حل مسئله‌ای که در آن از پاسخ، سؤال شکل می‌گیرد) با ایجاد نسبت‌های طولی از روی فواصل یک گام ۱۲ قسمتی، شکل یک دوازده‌ضلعی را رسم کرد. برای محاسبهٔ نسبت‌های طولی، باید فرمول زیر را به کار برد:

در این فرمول Cn، اندازهٔ فاصلهٔ درجهٔ nام گام به Cent و Ln، طول بخش فعال درجه nام گام است. با استفاده از این فرمول می‌توان نسبت‌های طولی را به‌راحتی محاسبه نمود. با محاسبهٔ اختلاف بین طول بخش‌های فعال درجات، می‌توان فواصل طولی بین درجات و درنهایت طول اضلاع دوازده‌ضلعی را به‌دست آورد و آن را طراحی کرد. در جدول زیر، محاسبات برای یک گام ۱۲ قسمتی مفروض مشاهده می‌شود (تصویر۱۵):

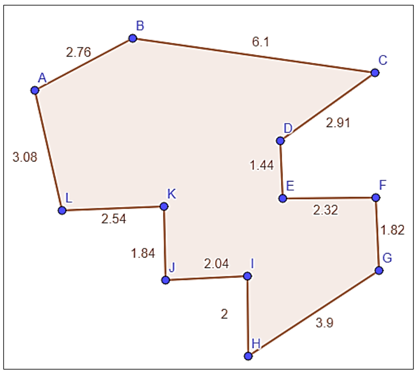
طول سیم	65.5		
درجه	فواصل گام	طول بخش فعال سیم مربوط به هر درجه هر درجه	طول اضلاع 12 ضلعی
1	0	65.5	
2	74.531	62.74	2.76
3	251.608	56.64	6.1
4	342.920	53.73	2.91
5	389.952	52.29	1.44
6	468.519	49.97	2.32
7	532.751	48.15	1.82
8	678.981	44.25	3.9
9	759.052	42.25	2
10	844.729	40.21	2.04
11	925.819	38.37	1.84
12	1044.392	35.83	2.54
1'	1200	32.75	3.08

تصویر ۱۵– محاسبه اضلاع یک دوازده‌ضلعی براساس اندازه فواصل یک گام ۱۲

$$Ln=\frac{1}{10^{\left(\frac{Cn\times\log 2}{1200}\right)}}$$

قسمتی (منبع: نگارنده)

در جدول بالا، تمام فواصل طولی بین درجات برای سیمی به طول ۶۵.۵۰سانتی‌متر محاسبه شده‌است. براساس طول اضلاع به‌دست‌آمده، می‌توان دوازده‌ضلعی مورد نظر را رسم نمود (تصویر۱۶):



تصویر۱۶– رسم دوازده‌ضلعی براساس فواصل گام ۱۲ قسمتی تصویر ۲۳ (منبع: نگارنده)

جمع‌بندی

همچنان که در ابتدای این مقاله عنوان شد، ریاضی می‌تواند اعداد، روابط، نسبت‌ها و تقارن‌ها را که با ظرافت در دل هر پدیده‌ای پنهان هستند، بیرون کشیده و در دسترس هنرمند قرار دهد. این اتفاق به‌نوعی مبین شکل‌گیری مسیری نو بین علم و هنر است، مسیری که خلاقیت ناآگاه هنرمند را به‌سمت اندازه‌گیری واقعیات عینی هدایت می‌کند. در موسیقی نیز وجوه قابل اندازه‌گیری و ثبت عددی و طراحی و تحلیل براساس ریاضی فراوانند.

ایدهٔ طراحی سیستم فواصل موسیقی براساس یک فرمول، یک تابع و رابطهٔ ریاضی و یک شکل هندسی؛ از جمله موارد کاربرد ریاضی در موسیقی است.

در این نوشته به نحوهٔ شکل‌گیری گام‌های ۱۲ قسمتی میکروتونال از دوازده ضلعی و بالعکس پرداخته شد. از نتایج این مطالعه می‌توان در آینده برای بررسی شکل‌گیری گام‌های پنتاتونیک از پنج‌ضلعی، هگزاتونیک از شش‌ضلعی و... استفاده کرد. همچنین می‌توان شکل‌گیری گام‌هایی مرتبط با چندضلعی‌هایی با اضلاع کمتر را از درون دوازده‌ضلعی بررسی نمود.

در واقع کاربرد مفاهیم ریاضی مانند توابع و روابط ریاضی و تبدیل نسبت‌های عددی و طولی اشکال هندسی به نسبت‌های طولی در سیم مرتعش و ایجاد فواصل موسیقی، می‌تواند به شنیدن موسیقی پنهان در اشکال هندسی و مفاهیم ریاضی کمک کند.

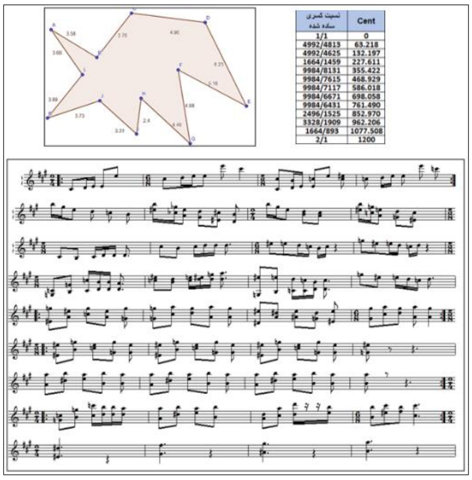
سپاسگزاری

نگارنده بر خود واجب می‌داند از همدلی دانشمند و هنرمند گرامی، جناب آقای آروین صداقت کیش و همفکری سرکار خانم مهندس نسرین عبادپور و لطف سرکار خانم مهندس سارینا پاکزاد در بازخوانی و ویرایش متن مقاله سپاسگزاری نماید.

پیوست: دو نمونه موسیقی ۱۲ قسمتی میکروتونال

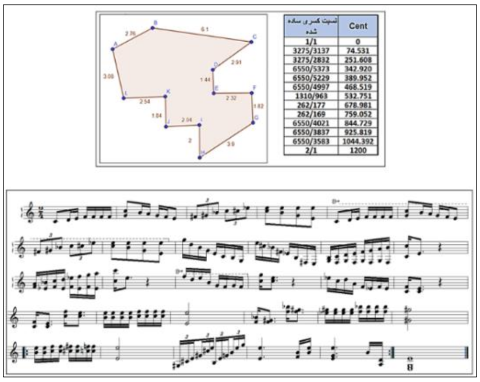
براساس نتایج حاصل از تبدیل طول اضلاع یک دوازده‌ضلعی نامنتظم به گام ۱۲ قسمتی میکروتونال، دو قطعه موسیقی ساخته و ارائه می‌شود. برای ساخت این قطعات با انتخاب سمپل سنتور و بعد از ورود اندازه فواصل در سمپلر Kontakt، نوت‌نویسی در برنامه Encore 4.5 انجام می‌شود. با اسکن کد QR مقابل، امکان دسترسی به قطعات فراهم شده‌است. شیوهٔ نوت‌نویسی قطعات میکروتونال منطبق بر روش پیشنهادی نگارنده است (مهاجری،۱۳۹۳).

قطعه ۱



نسبت کسری ساده شده	Cent
1/1	0
4992/4813	63.218
4992/4625	132.197
1664/1459	227.611
9984/8131	355.422
9984/7615	468.929
9984/7117	586.018
9984/6671	698.058
9984/6431	761.490
2496/1525	852.970
3328/1909	962.206
1664/893	1077.508
2/1	1200

قطعه ۲



نسبت کسری ساده شده	Cent
1/1	0
3275/3137	74.531
3275/2832	251.608
6550/5373	342.920
6550/5229	389.952
6550/4997	468.519
1310/963	532.751
262/177	678.981
262/169	759.052
6550/4021	844.729
6550/3837	925.819
6550/3583	1044.392
2/1	1200

منابع داخلی

آتالای، بولنت. (۱۳۹۶)، »ریاضیات و مونالیزا«، فیروزه مقدم، تهران، انتشارات مازیار

آقایانی چاوشی، جعفر. (۱۳۹۰)، »هفت ضلعی منتظم در ریاضیات اسلامی«،http://www.B۲n.ir/r۶۵۴۲۷

تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

افندی، جعفر .(۱۳۹۵) »رساله معماریه متنی از سده یازدهم هجری«، مهرداد قیومی بیدهندی، تهران، فرهنگستان هنر جمهوری اسلامی ایران

برل، آرمان. (۱۳۹۷)، »ریاضیات: علم و هنر«، روح‌الله جهانی‌پور و سعید مقصودی، http://www.B۲n.ir/u۵۸۸۶۵

تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

تخمچیان، ع. قره بگلو، م. نژادابراهیمی، ا. (۱۳۹۶)، »شکل‌گیری فضا در اثر پیوند مفهومی موسیقی–ریاضی و معماری،

(مطالعه موردی: جلوخان و آسمانه گنبد خانه مسجد شیخ لطف الله اصفهانی) https://www.B۲n.ir/x۷۱۸۷۳ «

تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

جیران زاده، راضیه. (۱۴۰۱)، » تناسب مفاهیم در اشکال هندسی و موسیقی در آثار دوره اسلامی«، http://www.B۲n.ir/s۹۴۱۷۸ تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

فارابی، ابونصر. (۱۳۷۵)، » کتاب موسیقی کبیر «، آذرتاش آذرنوش، تهران، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی

مهاجری، ش. (۱۳۹۹)، » موسیقی پنهان در هندسه « https://www.b2n.ir/r00522 تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

مهاجری، ش. (۱۳۹۹)، » موسیقی برگ« https://www.B۲n.ir/z۰۴۵۹۰ تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

مهاجری، ش. (۱۴۰۲)، » موسیقی میکروتونال چیست؟« https://B2n.ir/a19727 تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

مهاجری، ش. (۱۳۹۳)، » شیوه‌ای برای نت‌نویسی سیستم های میکروتونال ۱۲ قسمتی« https://B۲n.ir/t۹۷۱۵۲

تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۱

منابع خارجی

,Benson,D (۲۰۰۸). «Music: a Mathematical Offering», https://www.B۲n.ir/n۵۵۲۴۴

تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

,Budd,C(۲۰۲۰) . «The Art of Maths », https://www.gresham.ac.uk/watch-now/art-maths

تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

,Economou,A (۱۹۹۸) . «The Symmetry of the Equal Temperament Scale », http://www.B۲n.ir/b۸۸۷۵۹, تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

,JafariS & Karbasbaf, M (۲۰۱۷). « A Geometrical Method for Sound-Hole Size and Location Enhancement in Lute Family Musical Instruments: The Golden Method», https://www.B۲n.ir/p۸۳۰۹۳, تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۱

,JurgensonW & Birkett, S ,«Geometrical Methods in Stringed Keyboard Instrument Design and Construction » .(۲۰۰۰) https://www. B۲n.ir/y۵۷۰۲۸, تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۱

,NyhoffB & Aarskog, A & Holm, S (۲۰۲۴). «Geometric Construction of Pythagorean and Just Musical Scales and Commas », https://www.B۲n.ir/n۴۶۱۳۰, تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

,Rappaprt,D (۲۰۰۵). « Geometry and Harmony », https://www.B۲n.ir/h۷۶۴۶۳

تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

Shara,J (۲۰۲۲) . « Mathematics and art», http://www.B۲n.ir/k۹۲۹۸۱, تاریخ دسترسی ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

The Application of Dodecagons in Creating ۱۲-Division Microtonal Scales

Abstract

The selection of a scale is one of the most crucial steps in composing microtonal music. Every composer can create a new scale for their music in various forms and according to their preferences. One of the methods for designing scales ,involves the application of mathematical concepts. Since the formation of the study of musical interval systems mathematics has played a fundamental and essential role in the creation of tuning systems. The use of mathematical calculations in the formation of Pythagorean tuning systems, meantone temperament, and just intonation confirms this. The question that arises here is how the length ratios of a dodecagon can be converted into a ۱۲-step microtonal scale. To answer this question, this study first addresses fundamental concepts such as the relationship between string length and vibration frequency, microtonal music, mathematics and music, geometry and music, the structure of the dodecagon, and the ۱۲-division scale. Subsequently, previous works are reviewed, and through several examples, the method of designing and calculating the side lengths of various dodecagons using Geogebra software is discussed. The application of this data in designing various ۱۲-division microtonal scales using Excel spreadsheets and the creation of appropriate tables and figures is also examined. Additionally, an example is provided of converting the intervals of a division microtonal scale into the length ratios of a dodecagon.The result of this article, besides understanding how-۱۲ to apply the geometric relationships of various dodecagon shapes in designing different ۱۲-division microtonal intervallic systems, reveals the underlying truth that in all polygonal shapes, there is hidden music that becomes .audible once a distance system aligned with the length and geometric relationships is established

Keywords: ۱۲-division scale, Intervallic System, microtonal music, Geometry, Dodecagon